Chapitre 31

Déterminants

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

E, F désignent deux $\mathbb{K}$-e.v.

n, p sont des entiers de $\mathbb{N}^*$.

1 Forme p-linéaire alternée

1.1 Forme bilinéaire (ou 2-linéaire)

Définition 31.1 (Application bilinéaire)

On dit que $f : E \times E \to F$ est une application bilinéaire si f est linéaire par rapport à chacune de ses 2 variables, c'est-à-dire :

- Pour tout y_0 fixé dans E, l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} E &\to F \\ x &\mapsto f(x, y_0) \end{aligned}$$

- Pour tout x_0 fixé dans E, l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} E &\to F \\ y &\mapsto f(x_0, y) \end{aligned}$$

Si de plus $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme bilinéaire.

Exemple 1. Les applications suivantes sont toutes bilinéaires :

- L'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$.
- L'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(M, N) = MN$.
- L'application $\varphi : C^0(\mathbb{R}) \times C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
- L'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

- L'application $\varphi : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(f, g) = f \circ g$.

Étant donné une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ de E, on a vu qu'une application linéaire $u : E \to F$ est entièrement déterminée par la valeur que prend u sur les vecteurs de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire par la famille $u(\mathcal{B}) = (u(e_i))_{i \in I}$.

Propriété 31.2 (Expression de $f(u_1, u_2)$ selon une base de E)

On suppose que $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $f : E \times E \to F$ une application bilinéaire. Pour tous vecteurs $u, v \in E$, si on pose

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \qquad v = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j$$

alors on a

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j f(e_i, e_j)$$

En particulier, la donnée des $f(e_i, e_j)$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ suffit à totalement déterminer l'application f.

Démonstration.

$\square$

1.2 Forme p-linéaire

On rappelle que $p \in \mathbb{N}^*$ par hypothèse.

Définition 31.3 (Forme p-linéaire)

On dit que $f : E^p \to F$ est une application p-linéaire (sur E) si f est linéaire par rapport à chacune de ses p variables, c'est-à-dire :

- Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et pour toute famille $(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_p) \in E^{p-1}$ l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} &E \to F \\ &x \mapsto f(u_1, \cdots, u_{i-1}, \ x, \ u_{i+1}, \cdots, u_p) \end{aligned}$$

Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme p-linéaire.

Le p de cette définition est muet : on peut aussi parler d'application n-linéaire ou m-linéaire, etc. du moment que m, n ont été introduits.

Exemple 2. Les applications 1-linéaires sont exactement les applications linéaires.
Les applications 2-linéaires sont exactement les applications bilinéaires.

Exemple 3. L'application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \cdots, x_p) = \prod_{k=1}^{p} x_k$ est une forme p-linéaire.

Exemple 4. L'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{2024} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(M_1, \cdots, M_{2024}) = M_1 \cdots M_{2024}$ est une application 2024-linéaire.

Exemple 5. L'application $\varphi : C^0(\mathbb{R})^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f, g, h) = \int_0^1 f(t)g(t)h(t)\,dt$ est une forme 3-linéaire.

1.3 Forme linéaire alternée

Définition 31.4 (Forme linéaire alternée)

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. On dit que f est alternée si elle s'annule lorsque deux de ses arguments sont égaux, càd :

- Pour tout n-uplet de vecteurs $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$(i \neq j \quad \text{et} \quad u_i = u_j) \implies f(u_1, \cdots, u_n) = 0$$

Propriété 31.5

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E. Soit $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$. Si $(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille *liée* de vecteurs de E, alors

$$f(u_1, \cdots, u_n) = 0$$

Démonstration. Supposons par exemple que u_n s'écrive comme une combinaison linéaire de $u_1, \cdots, u_{n-1}$:

$$u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i \qquad \text{avec} \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$$

Alors,

$$\begin{aligned} f(u_1, \cdots, u_n) &= f\left(u_1, \cdots, u_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f(u_1, \cdots, u_{n-1}, u_i) \qquad \text{par linéarité} \end{aligned}$$

et tous les termes de la somme ci-dessus sont nuls car f est alternée (par exemple le terme pour $i = 1$ est $\alpha_1 f(\boxed{u_1}, \cdots, u_{n-1}, \boxed{u_1}) = 0$, etc.). □

Définition 31.6 (Forme n-linéaire antisymétrique)

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. On dit que f est antisymétrique si, lorsqu'on échange la position de deux des ses arguments, le résultat est multiplié par -1, càd :

- Pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$, on a

$$f(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_j, \cdots, u_n) \quad = \quad -f(u_1, \cdots, u_j, \cdots, u_i, \cdots, u_n)$$

Propriété 31.7

Soit f une forme n-linéaire sur E antisymétrique, et soit une permutation $\sigma \in S_n$. Alors pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$, on a

$$f(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \cdots, u_n)$$

Démonstration. Si $\tau \in S_n$ est une transposition, alors on voit facilement que

$$f(u_{\tau(1)}, \cdots, u_{\tau(n)}) = -f(u_1, \cdots, u_n)$$

Le résultat voulu s'obtient en décomposant σ comme un produit de transpositions : si $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r$ alors

$$\begin{aligned} f(u_{\tau_1 \cdots \tau_r(1)}, \cdots, u_{\tau_1 \cdots \tau_r(n)}) &= -f(u_{\tau_2 \cdots \tau_r(1)}, \cdots, u_{\tau_2 \cdots \tau_r(n)}) \\ &= f(u_{\tau_3 \cdots \tau_r(1)}, \cdots, u_{\tau_3 \cdots \tau_r(n)}) \\ &= (-1)^r f(u_1, \cdots, u_n) \end{aligned}$$

par récurrence immédiate. Or, comme σ est le produit de r transpositions, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$. D'où le résultat. □

Propriété 31.8

Toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique.

Démonstration.

□

Remarque. On peut montrer que réciproquement toute forme n-linéaire antisymétrique est alternée, mais ce résultat ne figure pas au programme.

1.4 Expression d'une forme n-linéaire alternée

On suppose que E est de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E.

Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E dont on pose leurs coordonnées selon la base $\mathcal{B}$:

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \qquad \text{avec } a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Calculons $f(u_1, \cdots, u_n)$ en fonction des coordonnées a_{ij} :

$$f(u_1, \cdots, u_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i2} e_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} a_{in} e_i\right)$$

On peut ensuite développer chaque somme par linéarité comme on l'a fait pour une application bilinéaire. On se retrouverait alors avec n^n termes :

$$\underbrace{a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} f(e_1, \cdots, e_1)}_{\substack{\text{on prend l'indice } i=1 \\ \text{dans chaque composante} \\ n\text{-uplet } (1,1,\cdots,1,1)}} + \underbrace{a_{11}a_{12}\cdots a_{1n-1}a_{2n} f(e_1, \cdots, e_1, e_2)}_{\substack{\text{on prend l'indice } i=1 \text{ sauf pour la} \\ \text{dernière composante où on prend } i=2 \\ n\text{-uplet } (1,1,\cdots,1,2)}} + \ \ldots \ + \underbrace{a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn-1}a_{nn} f(e_n, \cdots, e_n, e_n)}_{\substack{\text{on prend l'indice } i=n \\ \text{dans chaque composante} \\ n\text{-uplet } (n,n,\cdots,n,n)}}$$

Cependant, comme f est alternée, les termes ci-dessus s'annulent dès qu'une même valeur pour i est prise plusieurs fois. Il ne va donc rester que des sommes avec des indices distincts. Or, cela correspond exactement aux n-uplets qu'on peut former pour l'écriture d'une permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \substack{n\text{-uplet } (\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n-1),\sigma(n)) \\ \text{d'entiers distincts de } [\![1,n]\!]}$$

Sur les n^n termes de départ, on ne conserve donc que $n!$ termes : un pour chaque permutation de S_n :

$$f(u_1, \cdots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n} f(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)})$$

Or, comme f est antisymétrique (puisqu'elle est alternée), on a par la Proposition 31.7

$$f(u_1, \cdots, u_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n}\right) f(e_1, \cdots, e_n)$$

On en déduit en particulier que la donnée de $f(e_1, \cdots, e_n)$ suffit à totalement déterminer l'application f. Ainsi, on a obtenu la première assertion du résultat suivant :

Corollaire 31.9

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

- Il existe une unique forme n-linéaire alternée $d : E^n \to \mathbb{K}$ telle que $d(e_1, \cdots, e_n) = 1$.
- De plus, toute autre forme n-linéaire alternée f sur E est proportionnelle à d :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \qquad f = \lambda d$$

Démonstration. La première assertion découle de ce qui précède : en imposant $d(e_1, \cdots, e_n) = 1$, la forme n-linéaire alternée d est entièrement déterminée : pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$, on a en effet :

$$d(u_1, \cdots, u_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n} \right)$$

Pour la seconde assertion, soit f une forme n-linéaire alternée. Par ce qui précède, on a :

$$f(u_1, \cdots, u_n) = \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n} \right)}_{=d(u_1, \cdots, u_n)} f(e_1, \cdots, e_n)$$

En posant $\lambda := f(e_1, \cdots, e_n) \in \mathbb{K}$, on a bien $f(u_1, \cdots, u_n) = \lambda d(u_1, \cdots, u_n)$, donc $f = \lambda d$ par arbitraire sur $u_1, \cdots, u_n$. □

Remarque. On note parfois $\Lambda_n^*(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E. On peut montrer que c'est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$. Le Corollaire 31.9 dit en substance que $\Lambda_n^*(E)$ est de dimension 1, et qu'on peut prendre pour base, la famille à un seul élément (d) :

- La deuxième assertion montre que la famille (d) est génératrice de $\Lambda_n^*(E)$.
- La première assertion montre que $d \neq 0$, donc la famille (d) est libre.

2 Déterminant d'une famille de vecteurs, d'une matrice

Hypothèse

Pour le reste du chapitre, E est un espace de dimension **finie**.

2.1 Définition

Étant donné une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, on va donner un nom particulier à l'unique forme n-linéaire alternée f du Corollaire ci-dessus.

Définition 31.10 (Déterminant d'une famille de vecteurs)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$ l'application

$$\begin{aligned} \det{}_{\mathcal{B}} : E^n &\to \mathbb{K} \\ (u_1, \cdots, u_n) &\mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \end{aligned}$$

où les scalaires $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont les coordonnées définies par

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \qquad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \qquad \text{avec } a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Propriété 31.11

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

- $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E.
- $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \cdots, e_n) = 1$, ou encore $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Démonstration. En effet, l'application $\det_{\mathcal{B}}$ correspond à l'application d vue plus haut : il s'agit bien d'une forme n-linéaire alternée et elle vérifie $d(e_1, \cdots, e_n) = 1$ par construction. □

Propriété 31.12

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors $\det_{\mathcal{B}'}$ est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$. Plus précisément :

$$\forall (u_1, \cdots, u_n) \in E^n \qquad \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$$

Démonstration. L'égalité à démontrer étant vraie pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$, il suffit de montrer que

$$\underbrace{\det_{\mathcal{B}'}}_{\text{forme } n\text{-linéaire}} = \underbrace{\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{\det_{\mathcal{B}}}_{\text{forme } n\text{-linéaire}}$$

Or, $\det_{\mathcal{B}'}$ est une forme n-linéaire alternée sur E. Par le Corollaire 31.9, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. En évaluant en $\mathcal{B}$, on obtient alors

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})}_{=1} = \lambda$$

d'où le résultat. □

Corollaire 31.13

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$$

Démonstration. L'égalité de la Propriété 31.12 étant vraie pour tout n-uplet $(u_1, \cdots, u_n)$ de E^n, on peut en particulier prendre $(u_1, \cdots, u_n) = \mathcal{B}'$: on a donc

$$\begin{aligned} & \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \\ \Longrightarrow \qquad & 1 = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

2.2 Notations du déterminant

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $u_1, \cdots, u_n \in E$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$:

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Alors, on note

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_n) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

Remarque. En particulier, si $E = \mathbb{K}^n$ et si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors $u_j = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u_j)$: la colonne j du déterminant correspond au vecteur u_j reporté en colonne.

Exemple 6. On se place dans $E = \mathbb{K}_2[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On pose $P_1 = \alpha X^2 + 1$, $P_2 = X + \alpha$ et $P_3 = X^2 + \alpha X$. Écrire le déterminant de la famille (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de E.

Remarque. Si $\dim E = n$, on prendra bien garde à toujours prendre une famille de n vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ pour calculer un déterminant. Le déterminant doit toujours avoir autant de lignes que de colonnes.

2.3 Déterminant d'une matrice

Définition 31.14

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit le déterminant de A, noté $\det A$, par :

$$\det A := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \left(= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \right)$$

Remarque. On prendra bien garde à toujours appliquer le déterminant sur des matrices *carrées*.

3 Propriétés et calcul du déterminant

3.1 Calcul pour des tailles $n \leq 3$

Cas $n = 1$. Si $E = \mathbb{K}$, on a $S_1 = \{\mathrm{id}\}$, donc $\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = \varepsilon(\mathrm{id}) a_{\mathrm{id}(1)\,1} = a_{11}$

Cas $n = 2$. Si $E = \mathbb{K}^2$, on a $S_2 = \{\mathrm{id}, \tau\}$ avec $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \varepsilon(\mathrm{id}) a_{\mathrm{id}(1)\,1} a_{\mathrm{id}(2)\,2} + \varepsilon(\tau) a_{\tau(1)\,1} a_{\tau(2)\,2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

On retiendra donc la formule

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$$

Cette formule est à savoir par cœur !

Exemple 7.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \qquad\qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Cas $n=3$. On peut donner une formule pour le cas $n=3$, mais il est beaucoup plus efficace de retenir la méthode de calcul sur des exemples. Il s'agit de la règle de Sarrus :

Exemple 8.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

Remarque. La règle de Sarrus ne se généralise pas à des tailles $n \geq 4$.

3.2 Propriétés sur les colonnes

Théorème 31.15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on note $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Alors en notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$,

$$\det A = \det_{\mathcal{B}_c}(C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

Autrement dit

$\boxed{\text{Le déterminant est une forme } n\text{-linéaire alternée appliquée aux colonnes de } A}$

Corollaire 31.16

Avec les notations ci-dessus :

1. Si les colonnes $C_1, \cdots, C_n$ de A forment une famille liée, alors $\det A = 0$.
2. Le déterminant de A est inchangé lorsqu'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres. Par exemple :

$$\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K} \qquad \det A = \det{}_{\mathcal{B}_c}\left(C_1, C_2, \cdots, C_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i C_i\right)$$

3. On peut "factoriser" une colonne par un scalaire λ et le sortir du déterminant :

$$\begin{vmatrix} & \lambda a_{1j} & \\ & \lambda a_{2j} & \\ * & \vdots & * \\ & \lambda a_{nj} & \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} & a_{1j} & \\ & a_{2j} & \\ * & \vdots & * \\ & a_{nj} & \end{vmatrix}$$

4. Si on échange deux colonnes, le déterminant de A change de signe.
5. Plus généralement, une permutation des colonnes selon $\sigma \in S_n$ multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$:

$$\begin{aligned} \det{}_{\mathcal{B}_c}(C_{\sigma(1)}, \cdots, C_{\sigma(n)}) &= \varepsilon(\sigma) \det{}_{\mathcal{B}_c}(C_1, \cdots, C_n) \\ &= \varepsilon(\sigma) \det A \end{aligned}$$

Démonstration. Étant donné que le déterminant est une forme n-linéaire alternée, la première assertion découle de la Proposition 31.5. La seconde assertion se démontre à partir de la première :

$$\begin{aligned} &\det{}_{\mathcal{B}_c}\left(C_1, C_2, \cdots, C_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i C_i\right) \\ =&\det{}_{\mathcal{B}_c}(C_1, C_2, \cdots, C_n) + \det{}_{\mathcal{B}_c}\left(C_1, C_2, \cdots, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i C_i\right) \qquad \text{par linéarité} \\ =&\det A + 0 \end{aligned}$$

Le second déterminant étant nul car la famille $\left(C_1, C_2, \cdots, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i C_i\right)$ est liée. La troisième assertion se démontre encore par linéairité :

$$\det{}_{\mathcal{B}_c}(\cdots, \lambda C_i, \cdots) = \lambda \det{}_{\mathcal{B}_c}(\cdots, C_i, \cdots)$$

Pour la quatrième assertion, comme $\det_{\mathcal{B}_c}$ est une forme n-linéaire alternée, elle est antisymétrique, ce qui conclut. Enfin la Proposition 31.7 démontre la cinquième assertion. □

Les propriétés énoncées ci-dessus ont de *nombreuses* conséquences et applications.

Exemple 9.

- $$\begin{vmatrix} 1 & & 2 \\ \vdots & * & \vdots \\ 1 & & 2 \end{vmatrix} =$$

- $$\begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & * & \\ 0 & & \end{vmatrix} =$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 22 & 33 \\ 111 & 222 & 333 \end{vmatrix} = \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 22 & 11 & 33 \\ 222 & 111 & 333 \end{vmatrix} = \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 33 & 11 & 22 \\ 333 & 111 & 222 \end{vmatrix}$$

3.3 Propriétés sur les lignes

Propriété 31.17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det\left(A^\top\right) = \det A$.

Corollaire 31.18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on note $L_1, \cdots, L_n$ les lignes. Alors en notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$,

$$\det A = \det A^\top = \det_{\mathcal{B}_c} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_1 & L_2 & \cdots & L_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \det_{\mathcal{B}_c}(L_1, L_2, \cdots, L_n)$$

En particulier,

$$\boxed{\text{Le déterminant est une forme } n\text{-linéaire alternée appliquée aux lignes de } A}$$

Corollaire 31.19

Le résultat du Corollaire 31.16 est encore vrai si on remplace le mot “colonne(s)” par “ligne(s)”.

Exemple 10.

- $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

- $$\begin{vmatrix} & * & \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

- $$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ \mu b_1 & \mu b_2 \end{vmatrix} = \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

- $$\begin{vmatrix} a & b \\ c+d & e+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ & \end{vmatrix}$$

4 Calcul pratique du déterminant

4.1 Opérations élémentaires

On peut effectuer des opérations sur les lignes ou sur les colonnes pour calculer un déterminant, comme pour le calcul du rang. Cependant, contrairement au rang, la valeur du déterminant est modifiée quand on effectue une permutation ou une dilatation.

Propriété 31.20 (Opérations élémentaires)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$.

1. Transvection : une opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, ne change pas le déterminant.
2. Permutation : une opération $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$ change le signe du déterminant.
3. "Dilatation" : on peut "factoriser" par λ dans toute une colonne ou dans toute une ligne :

$$\begin{vmatrix} & & * & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ & & * & \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} & & * & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & * & \end{vmatrix}$$

Démonstration. Tout découle du Corollaire 31.16 pour les colonnes, et du Corollaire 31.19 pour les lignes.

1. Une transvection revient à ajouter à une colonne (ou une ligne) une combinaison linéaire des autres. L'assertion 2 du Corollaire entraine alors que le déterminant est inchangé.
2. L'assertion pour la permutation est une conséquence directe de l'assertion 3 du Corollaire.
3. Enfin, la dilatation est une conséquence du fait que le déterminant est une forme n-linéaire en les colonnes (et les lignes).

$\square$

Exemple 11. Calculer $D = \begin{vmatrix} & & & -1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 2 & & & \end{vmatrix}$ (les termes non écrits sont nuls)

Exemple 12. Soit $A \in A_{2n+1}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique de taille $2n+1$. Montrer que $\det A = 0$.

Exemple 13.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & * \\ -1 & 2 & * \\ -1 & 2 & * \end{vmatrix} = 0 \quad \text{car} \dots$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{car} \dots$$

Les exemples 9 et 10 fournissent d'autres applications de ces propriétés.

4.2 Développement selon une ligne / colonne, cas simple

Ces méthodes permettent de réduire la taille d'un déterminant, à savoir passer d'un déterminant de taille n à une somme de déterminants de taille $n-1$. On suppose donc dans cette partie que $n \geq 2$.

Propriété 31.21

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

Alors $\det A = \lambda \det A'$.

Démonstration. On permute $L_1 \leftrightarrow L_n$ puis $C_1 \leftrightarrow C_n$:

$$\det A = -\begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \\ \lambda & * & \cdots & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ * & \cdots & * & \lambda \end{vmatrix}$$

Appelons $a_{i\,j}$ les coefficients de la matrice du déterminant de droite (en particulier $a_{n\,n} = \lambda$). On a ainsi

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n}$$

Si $\sigma \in S_n$ est telle que $\sigma(n) \neq n$, alors $a_{\sigma(n)\,n} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n-1)\,n-1} a_{n\,n} \\ &= \lambda \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n-1)\,n-1} \end{aligned}$$

On affirme que

$$\det A = \lambda \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1)\,1} \dots a_{\sigma'(n-1)\,n-1}$$

En effet, si $\sigma \in S_n$ vérifie $\sigma(n) = n$, alors la permutation $\sigma|_{[\![1,n-1]\!]}$ réalise une bijection de $[\![1,n-1]\!]$ dans lui-même, i.e. $\sigma|_{[\![1,n-1]\!]} \in S_{n-1}$. Réciproquement, si $\sigma' \in S_{n-1}$, alors on peut prolonger σ' en une permutation de $[\![1,n]\!]$ en posant $\sigma'(n) = n$. Enfin, on peut vérifier que la signature est inchangée lors de la restriction / du prolongement. D'où l'affirmation ci-dessus. Puisque

$$\det A' = \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1)\,1} \ldots a_{\sigma'(n-1)\,n-1}$$

on obtient le résultat attendu. $\square$

Comme $\det\left(A^\top\right) = \det A$, le même résultat s'applique en passant à la transposée :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & A' & \\ * & & & \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det A = \lambda \det A'$$

Si $\lambda = 0$, on obtient $\det A = 0$: c'est cohérent avec ce qu'on a déjà vu car la première ligne ne contient alors que des zéros.

4.3 Déterminant d'une matrice triangulaire

Propriété 31.22 (Déterminant d'une matrice triangulaire)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire, alors

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Démonstration. On fait la preuve pour le cas A triangulaire supérieure. Alors

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \huge{*} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \huge{0} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

En développant selon la première colonne, on a

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & \huge{*} \\ & \ddots & \\ \huge{0} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Le déterminant restant est celui d'une matrice triangulaire de taille $n-1$. Par récurrence immédiate, on arrive à

$$\det A = a_{11} a_{22} \ldots a_{n-1\,n-1} \det\left(a_{nn}\right) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$\square$

Remarque. Ce résultat est en particulier vrai si A est diagonale : $\det A$ est alors le produit des coefficients diagonaux.

Méthode (Calcul d'un déterminant de grande taille)

La méthode générale de calcul d'un déterminant consiste à :

1. Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et/ou colonnes pour faire apparaitre un maximum de zéros sur une même ligne ou une même colonne.
2. Développer le déterminant selon cette ligne ou cette colonne pleine de zéros pour abaisser la taille des déterminants à calculer.
3. Les déterminants de taille 2 ou 3 peuvent alors être calculés directement (par exemple avec la règle de Sarrus).

- On peut aussi faire des opérations élémentaires pour se ramener à une forme triangulaire ou diagonale et conclure.

Exemple 14. Calculer $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

4.4 Développement selon une ligne / colonne, cas général

Définition 31.23 (Mineur, cofacteur)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$. On note

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_1 & & a_{1j} & & A_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & \\ A_3 & & a_{nj} & & A_4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array} \\ \text{colonne } j & \end{array}$$

avec A_1, A_2, A_3, A_4 des sous-matrices rectangulaires. On appelle <u>mineur d'indice (i, j)</u> le déterminant obtenu en enlevant la ligne i et la colonne j de A. On le note

$$\Delta_{ij} := \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

On appelle <u>cofacteur</u> d'indice (i, j) la quantité $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Propriété 31.24 (Développement selon une ligne ou une colonne)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On fixe $i \in [\![1, n]\!]$. Alors on peut développer le déterminant de A selon la ligne i :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

- On fixe $j \in [\![1, n]\!]$. Alors on peut développer le déterminant de A selon la colonne j :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

Ainsi, pour développer selon la ligne i, on parcourt tous les coefficients de la ligne i de A et on multiplie chaque coefficient par le cofacteur de même indice, puis on somme le tout.

Exemple 15. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Écrire sous forme factorisée $D = \begin{vmatrix} d & 1 & d \\ a & b & c \\ 1 & d & 1 \end{vmatrix}$. En déduire une CNS sur a, b, c, d pour avoir $D = 0$.

Remarque. Pour retenir facilement le signe $(-1)^{i+j}$ qu'on met pour chaque mineur Δ_{ij}, on peut remarquer que ce signe est toujours positif pour $i = j = 1$ (en haut à gauche) et qu'il alterne une fois sur deux :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Remarque. L'exemple 15 illustre l'application de la formule générale du développement selon une ligne ou colonne. Mais il ne donne pas la bonne méthode pour écrire un déterminant sous forme factorisée. Pour faire apparaitre des facteurs, il faut au contraire utiliser la formule simple du développement selon une ligne colonne, qui permet d'écrire $\det A = \lambda \times \det A'$ sans faire apparaitre de somme. La bonne approche pour l'exemple ci-dessus est

À noter, si on développe par exemple selon la ligne i,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

alors chaque coefficient a_{ij} nul entraine qu'il y a un terme de moins à calculer dans la somme ci-dessus. C'est ce qui permet de retrouver les formules de développement dans le cas "simple", i.e. la Proposition 31.21.

Méthode

Avant de développer selon une ligne ou une colonne, il est avantageux de faire apparaitre un grand nombre de zéros dans cette ligne ou cette colonne.

Bien qu'on puisse toujours se ramener à la forme de la Proposition 31.21 avant de développer, cela peut prendre bien plus d'étapes, d'où l'importance de savoir développer selon une ligne ou colonne quelconque.

Enfin, le développement selon une ligne ou une colonne est primordial pour des calculs de déterminant par récurrence, cf exemple suivant.

Exemple 16. Calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le déterminant de taille n défini par :

$$D_n := \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5 Déterminant d'un endomorphisme

5.1 Définition

On rappelle que si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une famille de E et si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f(\mathcal{B})$ est la famille définie par

$$f(\mathcal{B}) := (f(e_1), \cdots, f(e_n))$$

Propriété 31.25

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E,

$$\forall (u_1, \cdots, u_n) \in E^n \qquad \det{}_{\mathcal{B}}(f(u_1), \cdots, f(u_n)) = \det{}_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \det{}_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$$

De plus, le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie, on le note

$$\det f := \det{}_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$$

et on l'appelle déterminant de f.

Exemple 17. Calculons $\det \mathrm{id}_E$:

$$\det \mathrm{id}_E = \det{}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E(\mathcal{B})) = \det{}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$$

5.2 Propriétés algébriques du déterminant

Propriété 31.26

On suppose E de dimension n. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$
- $\det(f \circ g) = \det f \det g$
- f est inversible si et seulement si $\det f \neq 0$ et dans ce cas

$$\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1} = \frac{1}{\det f}$$

Remarque. L'application $\det$ est ainsi un morphisme de groupes de $(GL(E), \circ)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$.

Démonstration.

- Montrons la première assertion. Par définition, si on pose $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$

$$\begin{aligned} \det(\lambda f) &= \det{}_{\mathcal{B}}[(\lambda f)(\mathcal{B})] \\ &= \det{}_{\mathcal{B}}[\lambda f(e_1), \lambda f(e_2), \cdots, \lambda f(e_n)] \\ &= \lambda^n \det{}_{\mathcal{B}}[f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)] && \text{par linéarité} \\ &= \lambda^n \det f \end{aligned}$$

- Montrons la seconde assertion.

$$\begin{aligned} \det(f \circ g) &= \det{}_{\mathcal{B}}[(f \circ g)(\mathcal{B})] \\ &= \det{}_{\mathcal{B}}[f(g(\mathcal{B}))] \end{aligned}$$

Ensuite, en appliquant la Propriété 31.25 à la famille $(u_1, \cdots, u_n) = g(\mathcal{B})$, on en déduit

$$\begin{aligned} \det(f \circ g) &= \det f \times \det{}_{\mathcal{B}}(g(\mathcal{B})) \\ &= \det f \times \det g \times \det{}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \\ &= \det f \times \det g \end{aligned}$$

D'où la seconde assertion.

- Montrons la troisième assertion. Si f est inversible, alors

$$1 = \det \mathrm{id}_E = \det(f \circ f^{-1}) = \det f \times \det(f^{-1})$$

Ainsi, $\det f \times \det(f^{-1}) = 1$. Donc $\det f \neq 0$ et $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det f}$. Réciproquement, si $\det f \neq 0$, alors pour une base $\mathcal{B}$ quelconque de E,

$$\det{}_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \neq 0$$

Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée, si la famille $f(\mathcal{B})$ était liée, on aurait $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = 0$, ce qui est contradictoire. Donc la famille $f(\mathcal{B})$ est libre. Comme elle est de même cardinal que la dimension de E, c'est une base de E. Ainsi, l'image d'une base $\mathcal{B}$ par f est encore une base. Cela entraine que f est un isomorphisme, donc est inversible. D'où l'équivalence.

□

Propriété 31.27

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors pour toute base $\mathcal{B}$ de E,

$$\det f = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)$$

Démonstration. Par définition, si on pose $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$

$$\begin{aligned} \det f &= \det{}_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \\ &= \det{}_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

où a_{ij} est la coordonnée du vecteur $f(e_j)$ selon le vecteur e_i. Ainsi, a_{ij} est précisément le coefficient d'indice (i, j) de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Donc

$$\det f = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

□

5.3 Version matricielle des propriétés précédentes

Propriété 31.28

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det I_n = 1$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- $\det(AB) = \det A \det B$
- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Si tel est le cas, alors

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

En général, $\det(A+B) \boxed{\neq} \det A + \det B$.

Démonstration. Ces propriétés sont vérifiées pour des endomorphismes (Proposition 31.26) et on les déduit pour des matrices par la Proposition 31.27. Montrons par exemple la première assertion. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de $\mathbb{K}^n$. On sait que $I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n})$. D'où

$$\det I_n = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = \det(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = 1$$

Les autres assertions se déduisent de la même manière. □

Remarque. Bien que $AB \neq BA$ en général, on a tout de même $\det(AB) = \det(BA)$:

$$\det(AB) = \det A \det B \underbrace{=}_{\times \text{ est commutative dans } \mathbb{K}} \det B \det A = \det(BA)$$

Il en va de même pour les endomorphismes : $\det(f \circ g) = \det(g \circ f)$.

Exemple 18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(P^{-1}AP) = \det A$.

Exemple 19. Montrons par un contre-exemple que $\det(A+B) \neq \det A + \det B$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\det A + \det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

6 Applications du déterminant

6.1 Déterminer si une famille est une base

Propriété 31.29

On suppose E de dimension n. Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. On pose

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$$

Alors $(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\det A \neq 0$.

On notera que $\det A = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$.

Dans $\mathbb{K}^n$, en notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique, on peut vérifier directement si $\det_{\mathcal{B}_c}(u_1, \cdots, u_n)$ est nul ou non : cela revient à calculer le déterminant de la matrice où les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ sont écrits en colonne.

Exemple 20. Déterminer si la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6.2 Déterminer si une matrice A est inversible, et formule de A^{-1}

Rappel : on a vu que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. De plus, on a vu la définition d'un cofacteur et d'un mineur à la Définition 31.23.

Définition 31.30 (Comatrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle comatrice de A la matrice notée $\mathrm{Com}(A)$, telle que son coefficient d'indice (i, j) soit le cofacteur de A d'indice (i, j), càd

$$[\mathrm{Com}(A)]_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} \qquad = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} \quad \text{(déterminant sans ligne } i \text{ et colonne } j\text{)}$$

où Δ_{ij} est le mineur de A d'indice (i, j).

Propriété 31.31

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors
$$A\,\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top A = (\det A) I_n$$
En particulier, si $\det A \neq 0$, alors (A est inversible et)
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^\top$$

Remarque. Si A est inversible, on peut alors déterminer A^{-1} par la formule ci-dessus, toutefois elle est extrêmement lourde car elle nécessite de calculer tous les cofacteurs de A. Elle a donc principalement un intérêt théorique. Cependant, elle est également intéressante pour calculer A^{-1} si la matrice A est de taille 2.

Exemple 21. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors
$$\mathrm{Com}(A)^\top =$$
De plus, A est inversible si et seulement si
$$\det A = ad - bc \neq 0$$
et dans ce cas
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^\top =$$
On pourrait utiliser cette méthode pour calculer A^{-1} pour des tailles plus élevées, mais même pour $n = 3$, l'effort de calcul est conséquent. Il est conseillé de passer par la matrice augmentée.

6.3 $\approx$ Hors-programme : formules de Cramer

On pose
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$
Pour les besoins de la propriété suivante, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $A[B,k]$ la matrice obtenue en remplaçant la colonne k de A par celle de B (notation non officielle), i.e. :
$$A[B,k] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,k-1} & b_1 & a_{1\,k+1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,k-1} & b_n & a_{n\,k+1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$
On considère le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$. Il y a donc n équations avec n inconnues. On sait que, si A est inversible donc si $\det A \neq 0$, alors il y a existence et unicité de la solution et que cette solution est donnée par $X = A^{-1}B$ (on dit que c'est un système de Cramer).

Propriété 31.32 (Formules de Cramer)

On reprend les notations ci-dessus. Si $\det A \neq 0$, alors A est inversible et le système $AX = B$ admet pour unique solution $X = A^{-1}B$.
De plus pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, x_k peut s'écrire comme :
$$x_k = \frac{\det\left(A[B,k]\right)}{\det A}$$

Démonstration. On note $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A. L'égalité $AX = B$ peut en fait se réécrire $x_1C_1 + \ldots + x_nC_n = B$. Ainsi, par linéarité,

$$\det\left(A[B,k]\right) = \det\left(A\left[\sum_{i=1}^{n} x_iC_i, k\right]\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \det\left(A[C_i,k]\right)$$

Or, si $i \neq k$, alors la colonne C_i apparait deux fois dans $A[C_i,k]$: une fois à la colonne i et une fois à la colonne k : les colonnes forment donc une famille liée et donc $\det\left(A[C_i,k]\right) = 0$. Ainsi, il ne reste que le terme pour $i = k$:

$$\det\left(A[B,k]\right) = x_k \det\left(A[C_k,k]\right) = x_k \det A \qquad \text{car } A[C_k,k] = A$$

D'où le résultat. □

Exemple 22. Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. Le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ peut se réécrire

$$AX = B \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Comme $\det A = ad - bc \neq 0$, alors le système admet pour unique solution

$$x = \frac{\det A\,[B,1]}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\det A\,[B,2]}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}$$